

### 3. Prąd elektryczny

#### 3.1 Prąd stały

#### 3.2 Równanie ciągłości,

#### 3.3 Prawo Ohma

#### 3.4 Prawa Kirchhoffa

#### 3.5 Łączenie oporów

### 3.1 Prąd stały

Prąd elektryczny to uporządkowany ruch nośników. Prąd może płynąć w przewodnikach, ale także elektrolitach czy gazach. Przykładowe efekty przepływu prądu elektrycznego przedstawione są na poniższych rysunkach:



Rys. 3.1.1 Promieniowanie katodowe

Promieniowanie katodowe to strumień elektronów poruszający się w próżni. Wiązka elektronów formowana jest przez szczelinę, znajdującą się po lewej stronie odpompowanej bańki. Następnie elektrony padają na ekran z luminoforem, który pod ich wpływem zaczyna świecić ukazując drogę elektronów.

W dalszej części wykładu pokażemy, że wiązka taka może być odchylana pod wpływem pola magnetycznego (siły Lorentza).



Rys. 3.1.2 Przepływ prądu w elektrolicie. Krysztalki nadmanganianu potasu przed włączeniem prądu (po lewej) i po odpowiednio długim trwającym przepływie prądu (po prawej)

Przepływ prądu w elektrolicie wiąże się także z transportem masy. Można to zobaczyć m.in. przepuszczając prąd przez bibułkę zwilżoną roztworem soli kuchennej. Pod wpływem ruchu jonów elektrolitu unoszone są także jony nadmanganianu potasu.



Rys. 3.1.3. Obwód ze źródłem siły e-m., żarówką i rozgrzaną szklaną rurką

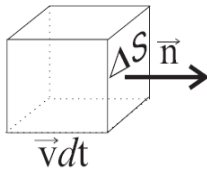
Elementem obwodu pokazanego na Rys. 3.1.3. jest szklana rurka. W temperaturze pokojowej rurka nie przewodzi prądu. Jej opór uniemożliwia przepływ prądu i świecenie żarówki. Po podgrzaniu rurki palnikiem gazowym sytuacja zmienia się. Rurka zaczyna świecić, a prąd zaczyna płynąć.

Dowodem na to jest świecenie żarówki. Interesująca jest obserwacja, że proces podtrzymywany jest samoistnie także po zaprzestaniu ogrzewania rurki. Jej wysoki opór sprawia, że wydzielane przy przepływie prądu ciepło podtrzymuje jej wysoką temperaturę. Nośnikami ładunku w rurce są jony sodu obecne w szkłe.

### 3.2. Równanie ciągłości

Prąd elektryczny charakteryzowany jest przez natężenie  $I$ . Natężenie prądu  $I$  przepływającego przez pewną powierzchnię wynosi:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



Rys. 3.2.1

Wyobraźmy sobie niewielki sześcian, przez który przepływa prąd elektryczny (patrz obok). Ładunek elektryczny  $\Delta q$ , przepływający przez ścianę takiego sześcianu w jednostce czasu  $\Delta t$ :

$$\Delta q = \rho_q n \cdot \Delta S \cdot v_d \cdot \Delta t$$

gdzie  $v_d$  jest prędkością, z jaką poruszają się nośniki (prędkością dryftu),  $\rho_q$  – gęstością ładunku, a  $n$  – wektorem normalnym do powierzchni o polu  $\Delta S$ . Oznacza to, że natężenie prądu  $I$  przepływającego przez powierzchnię  $\Delta S$  wynosi:

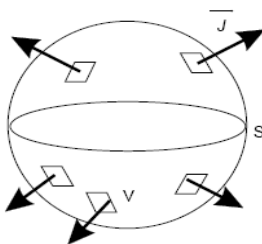
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_q v_d n \cdot \Delta S = J n \Delta S$$

Wektor  $J$  jest gęstością prądu:

$$J = \rho_q v_d = N e v_d$$

Uogólniając można napisać, że:

$$I = \int_{\Sigma} J \cdot n dS$$



Rys. 3.2.2

Przyjmując, że powierzchnia  $\Sigma$  jest powierzchnią zamkniętą (patrz Rys.3.2.2), ograniczającą objętość  $V$ , można zauważyć, że:

$$\oint_{\Sigma} J \cdot n dS = - \frac{d}{dt} q_{wew}$$

Ładunek znajdujący się wewnątrz tej powierzchni wynosi:

---

$$q_{wev} = \int_V \rho_q dV$$

Oznacza to, że:

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dV$$

Z prawa Gaussa wynika jednocześnie, że:

$$\oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} J dV$$

Stąd:

$$\int_V \operatorname{div} J dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dV \Rightarrow \int_V \left( \operatorname{div} J + \frac{d}{dt} \rho_v \right) dV = 0$$

Ponieważ całkowanie może odbywać się po dowolnej objętości, wynika stąd **równanie ciągłości** ładunku elektrycznego obowiązujące w dowolnym punkcie przestrzeni:

$$\nabla J = -\frac{\partial \rho_q}{\partial t}$$

### 3.3. Prawo Ohma

Zgodnie z klasyczną teorią przewodnictwa średnia energia kinetyczna elektronów w metalu wynosi:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Przyjmując, że gaz elektronów swobodnych można traktować jak gaz klasyczny:

$$v_{sr, kw} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Dla temperatury pokojowej (300 K)

$$\langle v \rangle \approx 1.6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Czas pomiędzy aktami rozproszenia nośników to czas relaksacji  $\tau$ , (dla miedzi w temperaturze pokojowej  $\tau = 2.7 \times 10^{-14}$  s). Średnia prędkość nabywana w czasie relaksacji  $\tau$ :

$$v_d = a\tau = \frac{eE}{m}\tau = \frac{e\tau}{m}E = \mu E$$

dla miedzi:

$$v_d = 5 \times 10^{-7} \text{ m/s}$$

Ponieważ czas relaksacji **nie zależy** od natężenia pola elektrycznego można wprowadzić pojęcie ruchliwości nośników,  $\mu$ :

$$\frac{e\tau}{m} = \mu \Rightarrow v_d = \mu E$$

Pamiętając o związku gęstości prądu z prędkością dryftu możemy zauważyć, że:

$$J = Nev_d = \frac{Ne^2\tau}{m} E$$

a więc, że gęstość prądu jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego. Jest to treść **prawa Ohma**:

$$J = \sigma E$$

gdzie przewodnictwo  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m} = Ne\mu$$

Prawo Ohma nie jest spełnione niespełnione w przypadku bardzo dużych pól elektrycznych, w których prędkość nośników przestaje być liniową funkcją natężenia pola elektrycznego oraz w polach elektrycznych włączanych na bardzo krótko.

Rozważając klasyczną teorię przewodnictwa (Drude, Lorentz) należy pamiętać, że nie wystarcza ona do opisu wszystkich zjawisk związanych z transportem w metalach. W szczególności załamuje się przy opisie ciepła właściwego. Poprawne rozwiązanie daje teoria kwantowa.

*l*



Rys. 3.3.1 Prawo Ohma

Georg Simon Ohm ur.  
16/3/1787, Erlangen zm.  
6/7/1854, Monachium

Rozważmy przewodnik prostoliniowy o polu przekroju  $\Delta S$  (patrz Rys. 3.3.1). Zmianę potencjału  $\Delta V$  po pokonaniu odległości  $l$  możemy zapisać jako:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = El$$

gdzie  $E$  jest natężeniem pola elektrycznego.

Zatem:

$$I = J \cdot \Delta S = \sigma \cdot E \cdot \Delta S = \sigma \frac{\Delta V}{l} \Delta S = \sigma \frac{\Delta S}{l} \Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta S}{l} \Delta V = \frac{\Delta V}{R}$$

Opór elektryczny  $R$  występujący w tej zależności zależy od oporności właściwej charakterystycznej dla materiału, z jakiego wykonany jest przewodnik oraz geometrycznych rozmiarów przewodnika:

$$R = \rho \frac{l}{\Delta S}$$

Jednostką oporu jest om:

$$\text{om } [\Omega] = \frac{\text{wolt [V]}}{\text{amper [A]}}$$

**Ograniczając zastosowanie prawa Ohma** do materiałów izotropowych możemy przyjąć, że przewodnictwo jest skalarem.

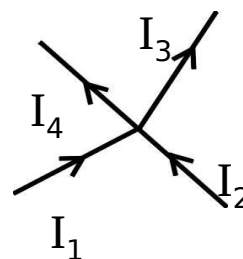
$$J = \sigma E$$

$$E = \rho J$$

$$\text{om } [\Omega] = \frac{\text{wolt [V]}}{\text{amper [A]}}$$

### 3.4 . Prawa Kirchhoffa

**Pierwsze prawo Kirchhoffa** wynika z zasady zachowania ładunku i mówi, że algebraiczna suma natężeń prądu wpływających do danego węzła obwodu elektrycznego równa jest zeru.



$$\sum I_i = 0$$

Rys. 3.4.1 Pierwsze prawo Kirchhoffa

Nośniki ładunku w wyniku przepływu prądu tracą energię potencjalną. Energia ta wynosi:

$$dE_p = dq\Delta V = IdtU = I^2 Rdt$$

i jest rozpraszana w oporniku w postaci ciepła, nazywanego ciepłem Joule'a-Lenza.

Tempo tracenia tej energii odpowiada mocy  $P$ :

$$P = \frac{dE_p}{dt} = I^2 R$$

Jednocześnie oznacza to, że energia przekazywana w trakcie przepływu prądu w jednostce czasu ( moc):

$$P = \frac{dE_p}{dt} = IU$$

Jednostką mocy jest wat:

$$1 \text{ wat} = 1 \text{ wolt} \cdot 1 \text{ amper} = \frac{1 \text{ dżul}}{1 \text{ sekunda}}$$

Aby utrzymać przepływ prądu, niezbędne jest wykonanie nad nośnikami pracy. Pracę tę wykonuje źródło siły elektromotorycznej (SEM)



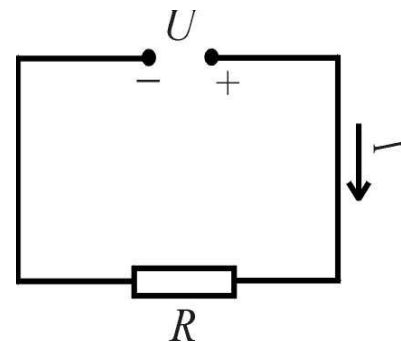
$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}$$

Idealne źródło SEM nie ma oporu wewnętrznego, rzeczywiste źródło SEM posiada opór wewnętrzny.

Analiza zmiany energii potencjalnej nośników wzdłuż zamkniętego obwodu, lub rozważanie zmian potencjału nośników prowadzi do sformułowania II prawa Kirrhoffa:

**Drugie prawo Kirrhoffa** wynika z zasady zachowania energii i mówi, że algebraiczna suma zmian potencjału napotykanym przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zero.

$$\varepsilon - IR = 0$$



Rys. 3.4.2 Drugie prawo Kirrhoffa

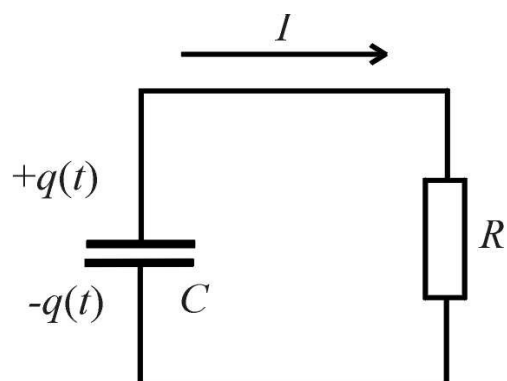
Przykładem na zastosowanie drugiego prawa Kirrhoffa jest rozładowanie kondensatora o pojemności  $C$  w obwodzie z opornikiem o oporze  $R$  (por. Rys. 2.4.3.). Załóżmy, że w chwili początkowej ( $t = 0$ ) ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora był równy  $q_0$ . W chwili  $t = 0$ , gdy obwód ulega zamknięciu zaczyna w nim płynąć prąd elektryczny o zmieniającym się w czasie natężeniu  $I(t)$ . Korzystając z II prawa Kirrhoffa można więc napisać:

$$\frac{q}{C} + IR = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$$

Rozwiązanie tego równania pozwala wyznaczyć wielkość ładunku zgromadzonego w kondensatorze:

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

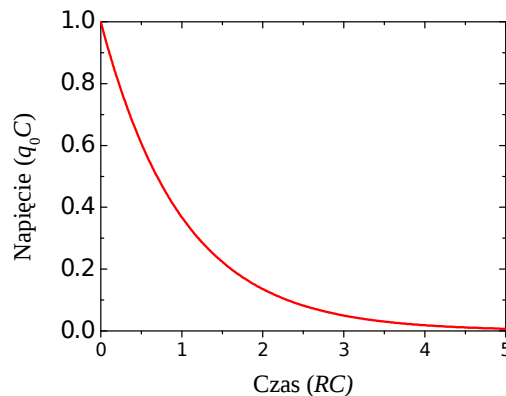


Rys 3.4.3 Schemat obwodu RC

gdzie  $\tau = RC$  jest pojemnościową stałą czasową rozważanego obwodu. Wynikające z tego wielkości natężenia prądu płynącego  $I(t)$  w obwodzie i napięcia panującego na okładkach kondensatora równe są odpowiednio:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$



Rys. 3.4.4. Zależność napięcia panującego na kondensatorze od czasu w opisywanym powyżej układzie

Widać w szczególności, że napięcie panujące na okładkach kondensatora po zamknięciu obwodu będzie wykładniczo zanikać z czasem co pokazuje Rys. 3.4.4.

Interesującym zagadnieniem jest kwestia bilansu energetycznego w rozważanym obwodzie. W dowolnej chwili czasu  $t > 0$  energia pola elektrycznego zgromadzonego w kondensatorze -  $E_c$ :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} e^{-\frac{2t}{RC}}$$

Jednocześnie całkowita energia wydzielona w oporniku na skutek przepływu prądu do chwili  $t$  wynosi:

$$W(t) = \int_0^t dW = \int_0^t I^2(t') R dt' = \frac{q_0^2}{RC^2} \int_0^t e^{-\frac{2t'}{RC}} dt' = \frac{-q_0^2}{RC^2} \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t'}{RC}} \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{q_0^2}{2C} \left( 1 - e^{-\frac{2t}{RC}} \right) = \frac{q_0^2}{2C} - E_c(t)$$

Łatwo zobaczyć, że w dowolnej chwili  $t$  suma energii zgromadzonej w kondensatorze  $E_c(t)$  i energii wydzielonej w oporniku w postaci ciepła Joule'a-Lenza  $W(t)$  odpowiada całkowitej energii zmagazynowanej początkowo w kondensatorze :

$$W(t) + E_c(t) = \frac{q_0^2}{2C} = E_c(0)$$

Innym przykładem zastosowania drugiego prawa Kirchhoffa jest ładowanie kondensatora. Załóżmy tym razem, że w chwili początkowej ( $t = 0$ ) kondensator jest rozładowany tj. ładunek zgromadzony na jego okładkach był równy 0. W chwili  $t = 0$ , gdy obwód zostaje zamknięty zaczyna w nim płynąć prąd elektryczny o zmieniającym się w czasie natężeniu  $I(t)$ . Korzystając z II prawa Kirchhoffa można więc napisać:

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt} R = 0$$

gdzie  $\varepsilon = \text{const.}$

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = \varepsilon$$

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowym niejednorodnym i można je rozwiązać metodą uzmiennienia stałej. W tym celu należy najpierw rozwiązać równanie jednorodne postaci:

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = 0$$

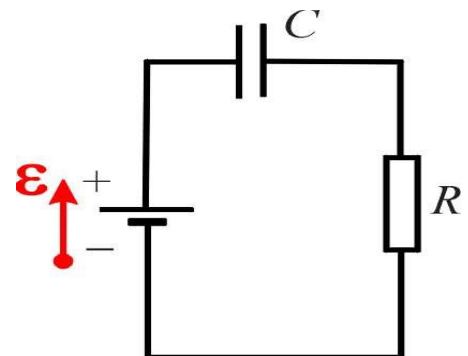
$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

co zrobiliśmy powyżej, znajdując:

Aby rozwiązać równanie niejednorodne należy uzmiennić stałą, a więc założyć, że  $q_0 = q_0(t)$ . Podstawiając taką postać rozwiązania otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} + R \frac{d}{dt} \left( q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right) = R \frac{dq_0}{dt} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{dq_0}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{\frac{t}{RC}}$$

i znajdujemy wzór na  $q_0$ :



Rys. 3.4.5. Ładowanie kondensatora w obwodzie RC

$$q_0 = \frac{\varepsilon}{R} \left( RCe^{\frac{t}{RC}} + A \right) \quad A = \text{const}$$

Ostatecznie:

$$q(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left( RC - Ae^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$q(0) = 0 \Rightarrow A = RC$$

Korzystając z warunków początkowych, a więc zauważając, że kondensator nie był początkowo naładowany można znaleźć rozwiązanie, a więc zależność ładunku  $q$  zgromadzonego w kondensatorze od czasu  $t$ :

$$q(t) = \varepsilon C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

### 3.5. Łączenie oporów

Połączenia oporników w obwodzie elektrycznym można sprowadzić do dwóch podstawowych połączeń: szeregowego i równoległego. W połączeniu szeregowym przez układ oporników płynie jednakowy prąd (o natężeniu  $I$ ). W takim przypadku spadek napięcia  $U_i$  na każdym z oporników  $R_i$  można wyrazić w postaci:

$$U_i = IR_i$$

Całkowity spadek napięcia w obwodzie  $U_{tot}$  jest sumą spadków napięć na każdym z oporników, zatem:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_Z$$

gdzie  $R_Z$  jest oporem zastępczym. Wynika stąd, że w połączeniu szeregowym:

$$R_Z = \sum R_i$$

W przypadku połączenia równoległego oporników, spadek napięcia na każdym z nich musi być jednakowy:

$$U_{tot} = U_1 = U_2 = U_3 = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{I_{tot}}{U_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

W połączeniu równoległym:

$$\frac{1}{R_z} = \sum R_i$$