

2. Elektrostatyka

2.1 Podstawy

2.2 Prawo Coulomba

2.3 Pole elektryczne

2.4 Prawo Gaussa

2.5 Praca w polu elektrycznym, potencjał

2.6 Kondensator, pojemność przewodnika

2.1 Podstawy



Rys. 2.1.1 Wiliam Gilbert, ur. Colchester , 24 maja 1544, zm. Londyn, 10 grudnia 1603

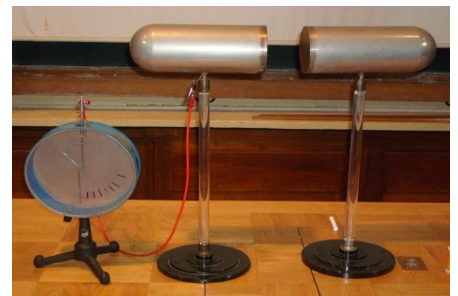
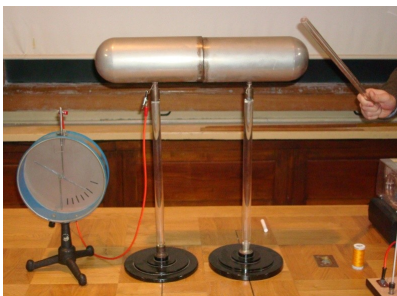
Zjawiska elektryczne obserwowane były już w starożytności. Obserwowano fascynujące zachowanie bursztynu, który potarty o tkaninę przyciągał skrawki słomy. Właśnie od greckiej nazwy bursztynu (ήλεκτρον) wywodzi się określenie tych zjawisk. Elektryczny (łac. *electricus*), odnoszący się do zjawiska przyciągania małych obiektów po potarciu to termin wprowadzony przez Wiliama Gilberta w traktacie *De Magnete* (1600).



Rys. 2.1.2 Charles Francois de Cisternay du Fay, ur Paryż, 14 września 1698, zm 1739

Badania nad elektrycznością przyspieszyły w XVIII w. kiedy to w pracy "*Discourse concerning Electricity*" *Philosophical Transactions* 431, 258 (1734) Charles Francois de Cisternay du Fay wprowadził pojęcie elektryczności szklanej i żywicznej. Okazuje się, że potarty kawałek szkła przyciąga potarty kawałek plastiku. Dwa potarte kawałki szkła lub plastiku nawzajem się odpychają. Obserwacja to pozwoliła mu na rozróżnienie dwóch rodzajów elektryczności. Dziś wiemy, że te „dwa rodzaje” wiążą się z dwoma możliwymi rodzajami ładunków elektrycznych. Szkło elektryzuje się ładunkiem dodatni, plastik ładunkiem ujemnym.

Oddziaływanie elektryczne wyjaśnia też możliwość elektryzowania ciał przez indukcję (wpływ). Kiedy do przewodnika zbliżamy (ale nie dotykamy) naelektryzowaną pałeczkę, jej ładunek przyciąga przeciwny ładunek znajdujący się w przewodniku. Rozdzielając w tym momencie dwie części przewodnika powodujemy, że każda na nich będzie naładowana przeciwnie, co łatwo sprawdzić obserwując zachowanie elektroskopu.



Rys. 2.1.3. Elektryzowanie przez indukcję

Dziś wiemy, że istnieją dwa rodzaje ładunków: dodatnie i ujemne. Nazwanie elektryczności szklanej- dodatnią, a żywicznej ujemną zwdzięczamy Benjaminowi Frankilkowi. Ładunki tego samego znaku odpychają się, a ładunki przeciwnych znaków przyciągają się, co tłumaczy zachowanie nalektryzowanych pałeczek.

Ładunek elektryczny jest skwantowany: elementarnymi nośnikami ładunku są elektrony (-) i protony (+).

Ładunek elementarny $Q_e = 1.60217733 \pm 0.00000049 \cdot 10^{-19}$

$$C=e$$

Co prawda kwarki, czyli cząstki, z których zbudowane są np. protony i neutrony, mają ładunki $\pm e/3$ lub $\pm 2e/3$, ale są one zawsze uwięzione, tj. nie występują poza hadronami.

Z tego powodu, nie traktuje się ich jako ładunki elementarne.



Rys. 2.1.4. Benjamin Franklin ur. Boston, 17 stycznia 1706, zm. Filadelfia, 17 kwietnia 1790

<i>u</i> up górnny	<i>c</i> charm powabny	<i>t</i> top prawdziwy	$+\frac{2}{3}e$
<i>d</i> down dolny	<i>s</i> strange dziwny	<i>b</i> bottom piękny	$-\frac{1}{3}e$

Ładunek elektronu jest równy ładunkowi protonu

$$|q_e - q_p| \approx 10^{-20} |q_e|$$

Symbo	Nazwa	Skład	Ładunek elektryczny ($ e $)
l			
p	proton	uud	1
n	neutron	udd	0

Całkowity ładunek elektryczny izolowanego układu to algebraiczna suma ładunków dodatnich i ujemnych występujących w dowolnej chwili czasu i nie może ulegać zmianie. Zasada zachowania ładunku obowiązuje m.in. w takich procesach jak:

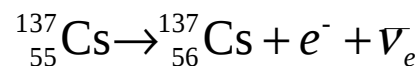
Anihilacja elektronu e^- (o ładunku $-e$) i jego antycząstki, pozytonu e^+ (o ładunku $+e$), w wyniku której cząstki te przekształcają się w dwa kwanty γ (promieniowania elektromagnetycznego o wielkiej energii):

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{gdzie } m(e^-) = m(e^+) \quad |q(e^-)| = |q(e^+)|,$$

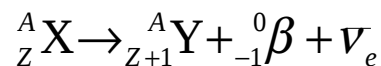
Kreacja pary elektron-pozyton:

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

Rozpad beta (minus)



czy też ogólnie:



gdzie:

A – liczba masowa

Z – liczba atomowa (liczba protonów odpowiadająca ładunkowi elektrycznemu)

${}_{-1}^0\beta$
- elektron

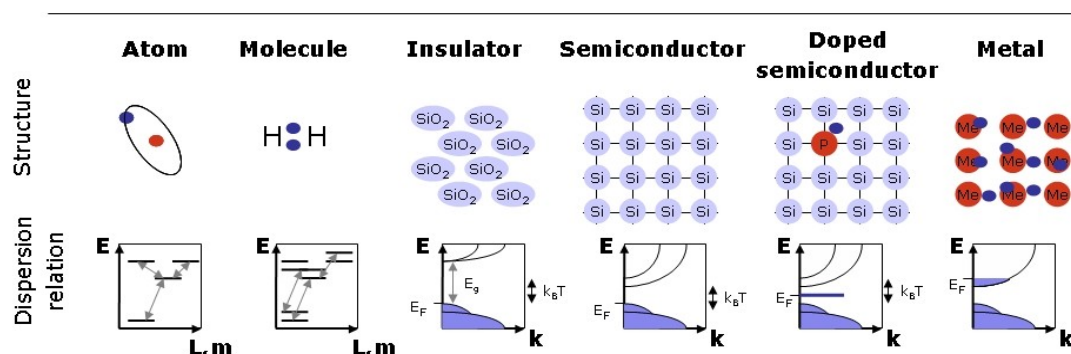
$\bar{\nu}_e$
- antyneutrino elektronowe

Ładunek elektryczny nie zależy od prędkości cząstki, a więc nie zmienia się przy przechodzeniu z jednego do drugiego układu odniesienia.

Obserwowane przez nas w doświadczeniach efekty są związane z budową materii. Ciało z jednakową ilością ładunku dodatniego i ujemnego jest **obojętne** elektrycznie. Ciało, w

którym wielkości tych ładunków nie są równe jest **naładowane** elektrycznie (naelektryzowane) i posiada ładunek nadmiarowy (niezrównoważony).

Możliwość przepływu ładunku elektrycznego pozwala na klasyfikację substancji.



Rys. 2.1.5. Elektroniczna struktura materii, The Opensource Handbook of Nanoscience and Nanotechnology

W **izolatorach** (ang. insulator) ładunek nie może swobodnie przepływać. Przykładami izolatorów są guma (taka jak izolacja przewodu elektrycznego zasilającego lampę), plastik, szkło, kwarc (dwutlenek krzemu) czy chemicznie czysta woda.

W **przewodnikach** ładunek elektryczny może się poruszać swobodnie. Przykładami przewodnika są metale (miedź, złoto, srebro), ciało ludzkie czy woda z kranu.

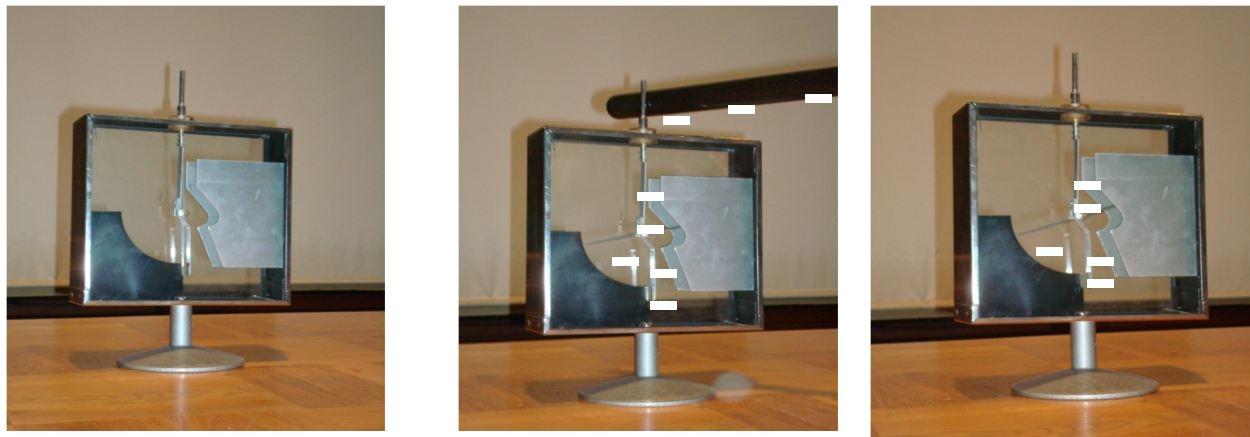
Półprzewodniki mają własności pośrednie pomiędzy przewodnikami i izolatorami. Zdolność do przewodzenia ładunku zależy w nich silnie od temperatury. Półprzewodnikami są krzem (Si), german (Ge), arsenek galu (GaAs) czy fosforek indu (InP) używane w układach elektronicznych i optoelektronicznych.

Nadprzewodniki są doskonałymi przewodnikami. Ładunek elektryczny w nadprzewodnikach przepływa bez napotykania jakiegokolwiek oporu.

Jeśli dwa jednakowe przewodniki zetkną się lub zostaną połączone przewodem to ich ładunek nadmiarowy rozdzieli się równo pomiędzy nie (ten fakt wykorzystał Coulomb w swoim doświadczeniu). Nadmiarowy ładunek elektryczny umieszczony na przewodniku sferycznym rozkłada się równomiernie na jego zewnętrznej powierzchni.

Możliwość swobodnego przepływu ładunku w metalach wyjaśnia działanie elektroskopu (Patrz. Rys. 2.1.6). Po dotknięciu do główki elektroskopu naelektryzowanej pałeczki, zgromadzony na niej ładunek (w pokazanym przypadku elektrony) przepływa na listki

urządzenia, swobodnie się na nich rozprzestrzeniając. Naładowane listki odpychają się powodując obserwowane wychylenie.



Rys. 2.1.6. Działanie elektroskopu

2.2. Prawo Coulomba



Rys.2.2.1. Charles Augustin de Coulomb, ur. Angouleme, 14 czerwca 1736 , zm. Paryż, 23 sierpnia 1806

Prawo Coulomba określa siłę elektrostatyczną działającą między ładunkami punktowymi. Jeśli spoczywające (lub wolno poruszające się) ładunki q_1 i q_2 odległe są o r to wartość siły działającej na każdy z nich ze strony drugiego ładunku wynosi:

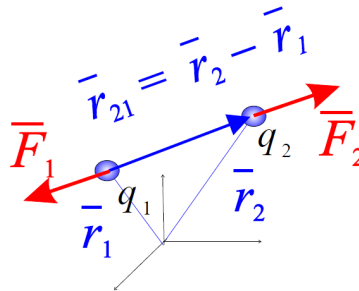
$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

gdzie

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7 \frac{\text{A}\cdot\text{m}}{\text{V}\cdot\text{s}}} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

c – prędkość światła w próżni,

ϵ_0 - przenikalność elektryczna próżni = $8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$.



$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

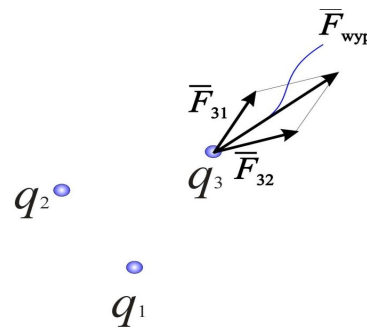
$$\vec{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$$

Wektor siły elektrycznej działającej na jedną cząstkę naładowaną ze strony innej cząstki naładowanej jest skierowany w stronę tej drugiej cząstki (gdy ładunki cząstek są przeciwne) lub odwrotnie (gdy ładunki są tego samego znaku).

Jeśli na cząstkę działa wiele sił elektrostatycznych to siła wypadkowa jest sumą wektorową sił składowych (zasada superpozycji).

$$F_{\text{wyp}} = F_{31} + F_{32}$$



Rys. 2.2.2. Zasada superpozycji

Warto zwrócić uwagę na podobieństwa i różnice pomiędzy siłą Colomba i siłą oddziaływania grawitacyjnego:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

Wielkość obu sił zależy odwrotnie proporcjonalnie od odległości pomiędzy oddziałującymi ciałami, ale siła grawitacyjna jest zawsze przyciągająca podczas gdy siła elektryczna może być zarówno przyciągająca jak i odpychająca. Ponadto nie istnieją ciała neutralne grawitacyjnie, tak jak mogą istnieć ciała neutralne elektrycznie.

Warto porównać siłę elektrostatyczną i grawitacyjną działającą między elektronem i protonem w atomie wodoru. Aby je oszacować przymijmy, że elektron i proton znajdują się w odległości promienia bohrowskiego od siebie (oczywiście odległość ta nie ma znaczenia).

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \times \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{kg})}{(5.29 \times 10^{-11} \text{m})^2} = 3.63 \times 10^{-47} \text{N}$$

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(5.29 \times 10^{-11} \text{m})^2} = 8.23 \times 10^{-8} \text{N}$$

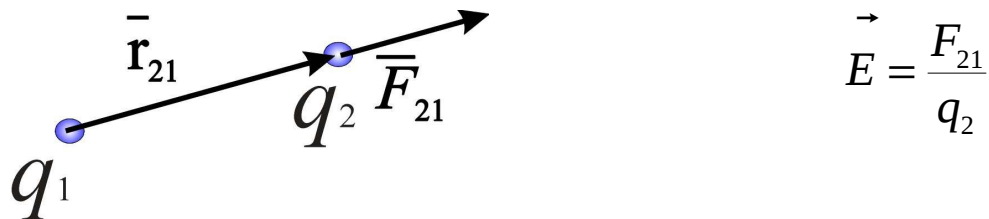
$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{39}$$

Siła elektrostatyczna jest w tym przypadku wiele rzędów wielkości większa niż siła grawitacyjna. W istocie siły grawitacyjne mają znaczenie gdy rozważamy ogromne masy ciał niebieskich i materii w przestrzeni kosmicznej. O ile można zgromadzić ogromne masy, niemożliwe jest wytworzenie bardzo silnie naładowanych ciał.

2.3 Pole elektryczne

Natężenie pola elektrycznego E wytwarzanego przez ładunek punktowy q_1 w danym

punkcie jest definiowane jako stosunek siły F_{21} , którą to pole działałoby na dodatni ładunek próbny q_2 , który zostałby w tym punkcie umieszczony:

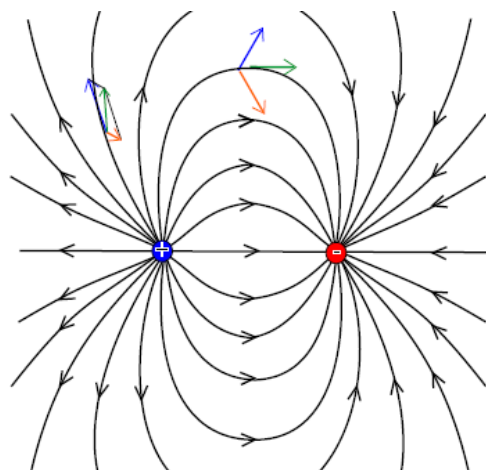


Rys. 2.3.1. Siła elektrostatyczna w polu ładunku punktowego

Rozkład pola elektrycznego można wizualizować korzystając z pojęcia linii pola elektrycznego. Wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie jest styczny do linii pola elektrycznego. Gęstość linii pola w tym punkcie jest proporcjonalna do wartości natężenia pola elektrycznego. Tak więc bliższe sobie linie odpowiadają silniejszemu polu.

Pojęcie pola elektrycznego jest wygodnym sposobem opisu oddziaływań, gdyż pozwala zapomnieć o źródle tego pola. W przypadku ładunków punktowych natężenie pola wielu ładunków jest wektorową sumą natężeń pól pochodzących od poszczególnych ładunków. Kiedy mamy do czynienia z bardziej złożonymi układami, układami, w których ładunek jest rozciągnięty, do znajdowania natężenia pola wykorzystujemy pojęcie ciągłego rozkładu ładunków.

Dipol elektryczny



Dipol elektryczny (z [gr.](#) *dipolos* - dwa bieguny) składa się z dwóch ładunków o tej samej wartości i przeciwnych znakach.



Moment dipolowy dipola:

$$p = q(r_+ - r_-) = qd$$

Rys. 2.3.2. Rozkład pola elektrycznego wokół dipola
 Natężenie pola elektrycznego na osi dipola:

$$E = E_x = E_{x,+q} + E_{x,-q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \left(\left(x - \frac{d}{2}\right)^{-2} - \left(x + \frac{d}{2}\right)^{-2} \right)$$

$$k \frac{q}{x^2} \left(1 - \frac{d}{2x}\right)^{-2} \approx k \frac{q}{x^2} \left(1 + 2 \frac{d}{2x} + \dots\right)$$

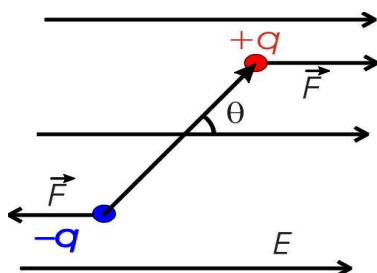
$$k \frac{q}{x^2} \left(1 + \frac{d}{2x}\right)^{-2} \approx k \frac{q}{x^2} \left(1 - 2 \frac{d}{2x} + \dots\right)$$

$$E_x = \frac{kq}{x^2} \left(1 + \frac{d}{x} + \dots - 1 + \frac{d}{x} + \dots\right) = \frac{2kqd}{x^3} = 2k \frac{p}{x^3}$$

Natężenie pola elektrycznego maleje z odległością jak $1/x^3$!

Na płaszczyźnie symetrii pomiędzy ładunkami dipola pole elektryczne jest prostopadłe do tej płaszczyzny:

$$E_{\perp} = 2k \frac{\frac{d}{2}q}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \rho^2\right)^{3/2}}$$



Na dipol elektryczny w jednorodnym polu działa moment siły M :

$$M = p \times E$$

Rys. 2.3.3. Moment siły działający na dipol elektryczny

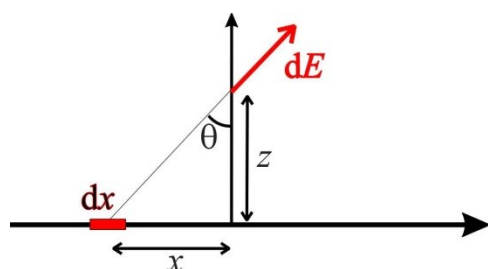
$$E_p = -pE$$

Energia potencjalna dipola p w polu elektrycznym E równa jest:

Do opisu momentów dipolowych cząsteczek w fizyce atomowej i chemii stosuje się czasem **debaje** (D) – jednostki miary nienależące do układu SI

$$1 \text{ D} = 3,33564 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$$

Nić naładowana jednorodnie z gęstością ładunku λ .



Rys. 2.3.4 Nić naładowana jednorodnie o nieskończonej długości

Z symetrii wynika, że wypadkowe pole elektryczne w punkcie odległym o z od tej nici będzie miało wyłącznie składową radialną. Wynika to z faktu, że każdemu elementowi dx znajdującemu się w odległości x od umownego początku układu współrzędnych (patrz Rys. 2.3.4) odpowiada taki sam element dx znajdujący się w punkcie $-x$. Poszukujemy zatem wyłącznie składowej radialnej siły działającej na ładunek próbny q' :

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'\lambda dx}{x^2 + z^2} \cdot \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'\lambda dx}{x^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'z\lambda dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = 2 \int_0^{\infty} dF_z = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \lambda z \int_0^{\infty} \frac{q' dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Po zamianie zmiennych i wprowadzeniu kąta θ :

$$x = z \operatorname{tg} \theta \quad dx = z \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{z^3 \left(\frac{x^2}{z^2} + 1 \right)^{3/2}} = z \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{z^3 (\operatorname{tg}^2 \theta + 1)^{3/2} \cos^2 \theta} =$$

$$= \frac{1}{z^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right)^{3/2} \cos^2 \theta} = \frac{1}{z^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{1}{z^2} \int_0^{\pi/2} d\sin \theta = \frac{1}{z^2}$$

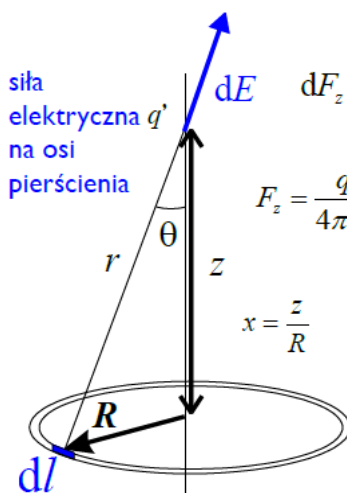
otrzymujemy:

$$F_z = \frac{q'}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z}{z^2} = \frac{q' \lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$$

czyli

$$E_z = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$$

Pierścień naładowany jednorodnie z gęstością liniową ładunku λ :



Rys. 2.3.5 Pierścień naładowany jednorodnie z gęstością liniową ładunku λ

Z symetrii wynika, że natężenie pola elektrycznego będzie w takim przypadku miało wyłącznie składową wzdłuż ponowej osi pierścienia. Każdemu elementowi dl odpowiada taki sam element dl znajdujący się naprzeciwko.

$$dF_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cdot \cos \theta = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z \lambda dl}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int dl = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\lambda}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$x = \frac{z}{R}$$

Wprowadzając bezwymiarową zmienną $x = \frac{z}{R}$, możemy napisać, że:

$$F_z = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} = F_0 \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

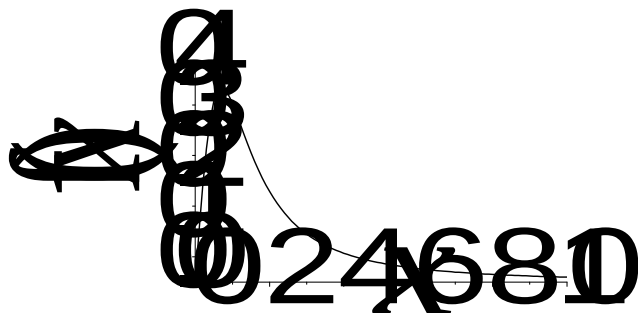
Przechodząc do natężenia pola elektrycznego uzyskujemy:

$$E_z = E_0 \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} = E_0 f(x)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją, której wykres pokazuje Rys. 2.3.5. Warto przeanalizować zachowanie tej funkcji w przypadkach granicznych.

Dla $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$. Pole w środku pierścienia znika, gdyż w tym punkcie nawzajem znoszą się wpływy elementów położonych dokładnie naprzeciw.

Dla $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 1/x^2$. Pole elektryczne dostatecznie daleko od pierścienia staje się podobne do pola elektrycznego ładunku punktowego o wartości równej ładunkowi zgromadzonemu na pierścieniu.

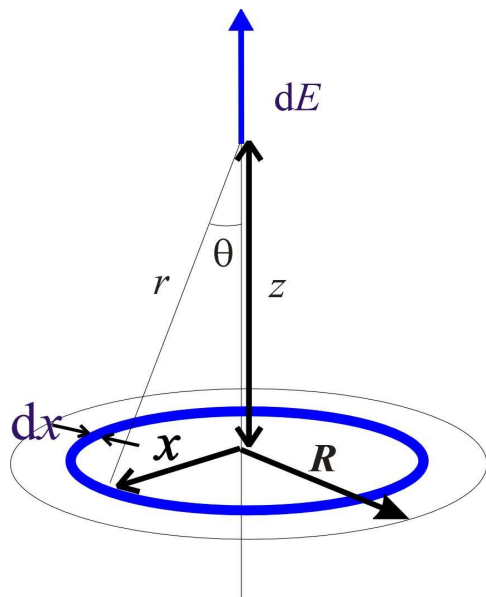


$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Rys. 2.3.6. Wykres funkcji

Tarcza naładowana jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku σ

Q - ładunek całkowity, R - promień tarczy, σ - gęstość powierzchniowa ładunku, a więc $Q = \sigma\pi R^2$



Rys. 2.3.7. Tarcza naładowana jednorodnie z gęstością powierzchniową ładunku σ

$$dq = \sigma dS = 2\sigma\pi x dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\sigma\pi x z dx}{(z^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2x dx}{(z^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \int_0^R dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} (-2)(z^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_0^R =$$

$$= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{z} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

2.4. Prawo Gaussa

Strumień elektryczny Φ przez powierzchnię odpowiada ilości pola elektrycznego przenikającego przez tę powierzchnię. Element strumienia pola wektorowego E przez element powierzchni dS :

$$d\Phi = E \cdot dS$$

dS
Wektor powierzchni dla elementu powierzchni jest wektorem prostopadłym do tego elementu, którego wartość jest równa polu powierzchni dS tego elementu.

Całkowity strumień elektryczny przez powierzchnię wynosi

$$\Phi = \int d\Phi = \int E \cdot dS$$

gdzie całkowanie odbywa się po powierzchni.

Zdefiniujemy objętość V , ograniczoną przez powierzchnię Σ (będziemy ją nazywać powierzchnią Gaussa). Strumień pola elektrycznego przenikający tę powierzchnię wynosi:

$$\Phi = \oint E \cdot dS$$

Jeśli źródłem pola elektrycznego jest ładunek punktowy, a powierzchnię definiujemy jako sferę o promieniu r , której środek znajduje się w punkcie, w którym znajduje się ten ładunek, to strumień pola elektrycznego przenikający tę powierzchnię wynosi:

$$\Phi = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \frac{r}{r} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Strumień pola elektrycznego przenikający tę powierzchnię jest równy ładunkowi elektrycznemu zawartemu wewnątrz (i podzielonemu przez stałą elektryczną). W istocie wynik ten jest bardziej ogólny i stanowi prawo Gaussa, mówiące, że dla dowolnej powierzchni zamkniętej strumień pola elektrycznego (natężenia pola elektrycznego), który przez nią przenika jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz tej powierzchni.

Parwo Gaussa stanowi pierwsze z równań Maxwella:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

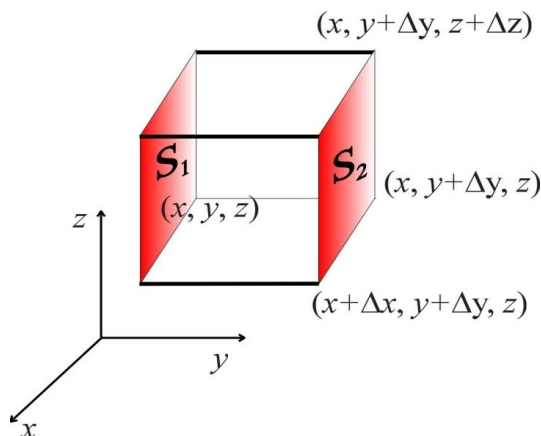
Prawo Gaussa można też wyrazić w postaci różniczkowej opisującej lokalnie własności pola elektrycznego. Rozważmy niewielki sześcian znajdujący się w punkcie o współrzędnych (x, y, z) . Natężenie pola elektrycznego w tym punkcie wynosi \vec{E} .

W takim przypadku natężenie pola w punktach na powierzchni sześcianu można wyrazić jako:

$$\vec{E}(x_i) = \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} dx_i$$



Rys. 2.4.1. Carl Friedrich Gauss – *princeps mathematicorum* , ur. 30 kwietnia 1777 w Brunzwicku, zm. 23 lutego 1855 w Getyndze



Rys. 2.4.2. Prawo Gaussa

Rozważmy dla ustalenia uwagi strumień przenikający powierzchnię S_1 i S_2 . Wektory normalne do tych powierzchni mają współrzędne:

$$\vec{n}(S_1) = [0, -1, 0]$$

$$\vec{n}(S_2) = [0, 1, 0]$$

Strumień przenikający te powierzchnie to odpowiednio:

$$\Phi_{S_1} = -E_y(x, y, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z; \quad \Phi_{S_2} = E_y(x, y + \Delta y, z) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

zaś wypadkowy strumień przenikający powierzchnie S_1 i S_2 wynosi:

$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = (E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

Jednocześnie:

$$E_y(x, y + \Delta y, z) = E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y + \dots$$

co oznacza, że:

$$\Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

W podobny sposób łatwo pokazać, że:

$$\Phi_{S_3} + \Phi_{S_4} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

oraz

$$\Phi_{S_5} + \Phi_{S_6} = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Podsumowując zauważamy, że całkowity strumień przenikający ściany sześcianu wynosi:

$$\Phi_{\text{tot}} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

W nawiasie znajdujemy wynik działania pewnego operatora na wektor E , operator ten nazywamy dywergencją:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Dywergencja we współrzędnych kartezjańskich ma postać:

$$\vec{\nabla} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Prawo Gaussa możemy zatem zapisać w postaci:

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_V(\vec{r}) dV$$

co oznacza, że

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

Jeśli całkowanie po dowolnej objętości daje w wyniku zero oznacza to, że wszędzie w obszarze całkowania musi znikać funkcja podcałkowa, czyli dla dowolnego punktu przestrzeni:

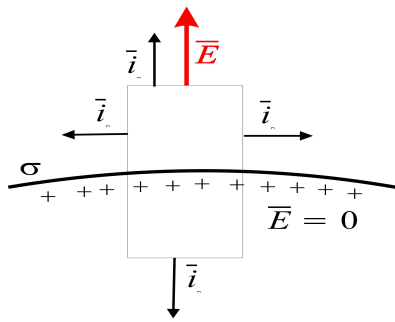
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Powyższy wzór stanowi różniczkową postać prawa Gaussa.

Pole elektryczne w przewodniku i wokół niego

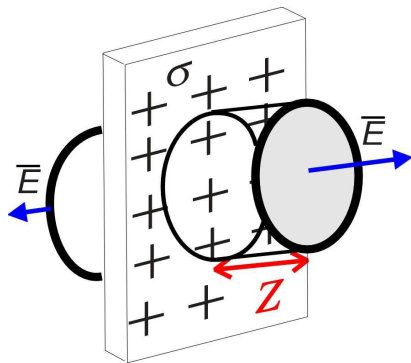
Prawo Gaussa można łatwo wykorzystać do znajdowania natężenia pola elektrycznego w różnych układach o wysokiej symetrii.



$$E\Delta S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Natężenie pola elektrycznego zależy liniowo od powierzchniowej gęstości ładunku

Rys. 2.4.3. Natężenie pola elektrycznego nad metalową półprzestrzenią

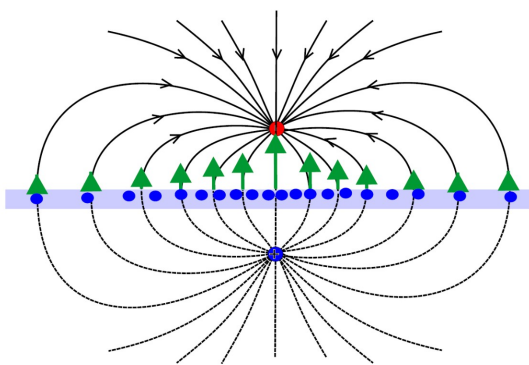


$$\Phi = E \cdot S + E \cdot S = 2 \cdot E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Rys. 2.4.4. Natężenie pola elektrycznego nad naładowaną jednorodną płytą

Metoda obrazów



Rys. 2.4.5. Natężenie pola elektrycznego w przestrzeni nad uziemioną płytą w obecności ładunku $+q$ –metoda obrazów

Na płaszczyźnie znika składowa styczna pole elektrycznego. Pozostaje składowa prostopadła:

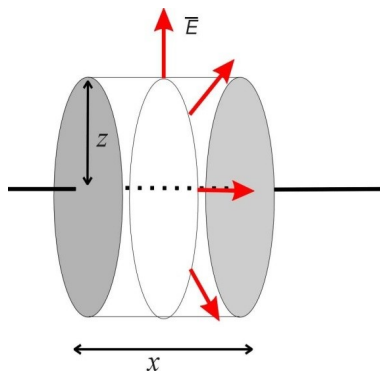
$$E_{\perp} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{aQ}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

gdzie a jest odległością ładunku Q od powierzchni, a ρ odległością od ładunku liczoną wzdłuż powierzchni. Odpowiadająca temu natężeniu pola lokalna gęstość ładunku zgromadzonego na płaszczyźnie wynosi:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{1}{2\pi} \frac{aQ}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Można łatwo pokazać, że całkowity ładunek zgromadzony na płaszczyźnie wynosi Q

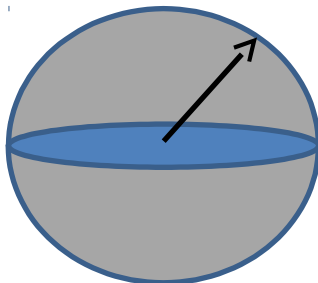
Prosta naładowana jednorodnie



$$\Phi = 2\pi z x E = \frac{q_{wew}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda x}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi z \epsilon_0}$$

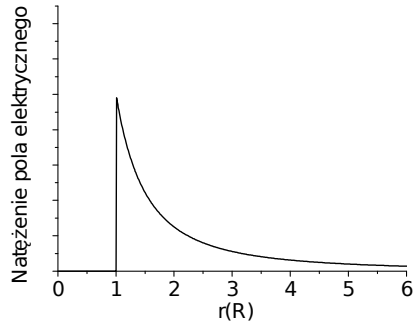
Rys. 2.4.6 Prosta naładowana jednorodnie

Pole elektryczne dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunków

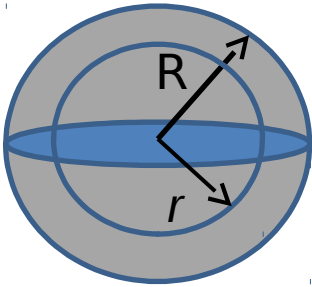


$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

Rys. 2.4.7. Naładowana przewodząca kula o promieniu R



Jednorodnie naładowana kula



Rys. 2.4.8. Jednorodnie naładowana kula o promieniu R

$$\begin{cases} \rho_q(r) & \text{dla } r < R \\ 0 & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

1. dla $r < R$

$$\begin{aligned} E(r)4\pi r^2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_q(r') dV' = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_q(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho_q(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

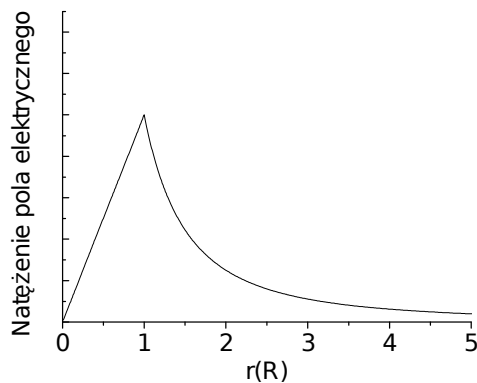
$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho_q(r') r'^2 dr' \Rightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2. dla $r > R$

$$Q(r) = Q \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Co oznacza że jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha inne naładowane ciała tak, jakby cały jej ładunek był skupiony w jej środku.

Szczególny przypadek $\rho(r) = \rho_0 = \text{const}$



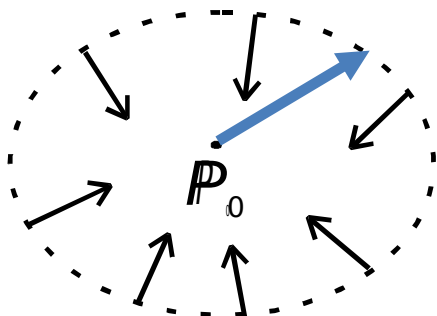
$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0 r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{3} r^3$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & \text{dla } r < R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

Rys. 2.4.9. Natężenie naładowanej kuli o promieniu R w funkcji odległości od jej środka

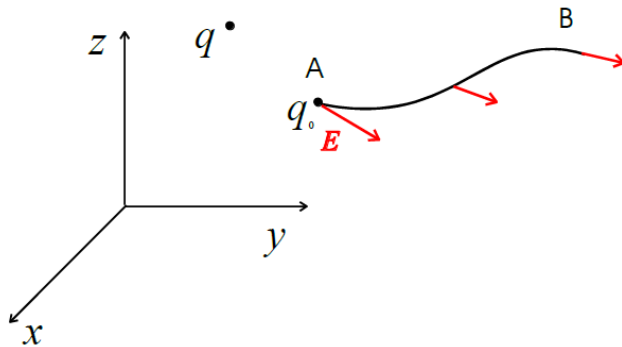
Równowaga w polu elektrostatycznym

Kiedy ładunek elektryczny może być w równowadze trwałej w polu elektrycznym innych ładunków? Rozważmy sytuację pokazaną na Rys. 2.4.10. W punkcie P_0 pole elektryczne musi zniknąć. Po przesunięciu ładunku z punktu P_0 powinna pojawiać się siła skierowana przeciwnie do przesunięcia. W takim przypadku nieznikający strumień pola elektrycznego oznacza ładunek ujemny znajdujący się wewnątrz powierzchni Gaussa. Ładunek dodatni może być w równowadze jeśli znajduje się w środku ładunku ujemnego, który musiałby być utrzymywany przez siły nieelektryczne. Wynika stąd, że statyczny układ ładunków elektrycznych nie może pozostawać w równowadze trwałej.



Rys. 2.4.10. Statyczny układ ładunków elektrycznych nie może pozostawać w równowadze trwałej

2.5. Praca w polu elektrycznym, potencjał



Rys. 2.5.1 Praca w polu elektrycznym

Praca siły elektrycznej W wzdłuż drogi l :

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{l}$$

Jeśli pole elektryczne pochodzi od ładunku punktowego, to element przesunięcia $d\vec{l}$ można rozłożyć na element przesunięcia radialnego $d\vec{r}$ i element przesunięcia transwersalnego $d\vec{t}$:

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} (d\vec{r} + d\vec{t}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \int_A^B \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} (d\vec{r} + d\vec{t})$$

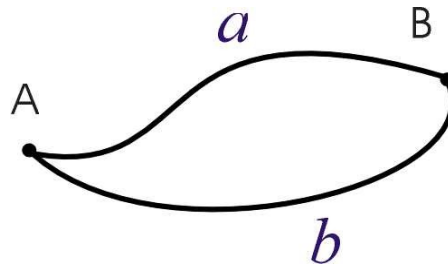
Przesunięcie transwersalne, a więc prostopadłe do kierunku działania siły nie wnosi wkładu do pracy, zatem:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \int_A^B \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \int_A^B \frac{1}{r^2} dr =$$

$$\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_A^B = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Praca, której poszukujemy zależy wyłącznie od położenia punkt początkowego i końcowego!

Ponieważ pole elektryczne jest addytywne, to znaczy, że natężenie pola można zawsze przedstawić jako sumę natężeń pochodzących od każdego z tworzących je ładunków, dochodzimy możemy ten wynik uogólnić na każdy przypadek pola elektrostatycznego.



Rys. 2.5.2 Niezależność pracy w polu elektrostatycznym od drogi

$$W(a) = \int_{droga a}^B \vec{F} d\vec{l} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$W(b) = \int_{droga b}^B \vec{F} d\vec{l} = -\frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

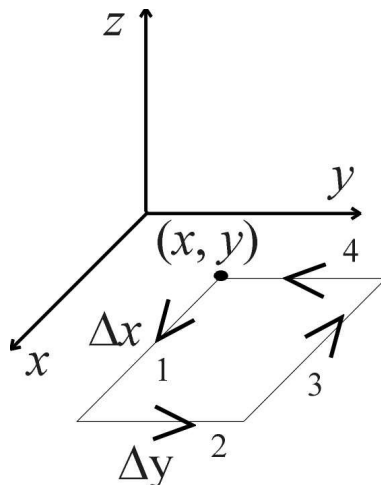
Jesli praca w polu elektrycznym nie zależy od drogi: pole elektryczne jest zachowawcze (konserwatywne):

$$\frac{1}{q} \oint \vec{F} d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} - \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = 0$$

to w szczególności dla pola elektrostatycznego krążenie natężenia pola elektrycznego po krzywej zamkniętej znika:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Podobnie jak w przypadku prawa Gaussa możemy tę postać całkową zamienić na postać różniczkową.



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_x(1)\Delta x + E_y(2)\Delta y - E_x(3)\Delta x - E_y(4)\Delta y$$

$$= (E_x(1) - E_x(3))\Delta x + (E_y(2) - E_y(4))\Delta y$$

Ponieważ:

$$E_x(3) = E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y$$

oraz

Rys.2.5.3 Twierdzenie Stokesa

$$E_y(4) = E_y(2) - \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x$$

to:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta y \Delta x = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \Delta y \Delta x$$

$$= e_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + e_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + e_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

Możemy to zapisać w postaci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot n dS$$

czyli

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Energia potencjalna

Ponieważ praca potrzebna do przeniesienia ładunku w polu elektrycznym nie zależy od drogi to pracę to można powiązać ze zmianą energii potencjalnej ładunku w polu:

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i} = -\Delta W$$

gdzie ΔW - praca jaką wykonałaby siła elektrostatyczna działająca na ładunek przy przeniesieniu go z punktu i do punktu f . Można w takim razie przypisać ładunkowi w polu elektrycznym pewną energię potencjalną. Zwykle przyjmuje się, że gdy ładunki są nieskończenie dalekie od siebie

$$E_{p_{initial}} = 0$$

W takim przypadku energia potencjalna ładunku w polu jest równa

$$E_p(r) = -W_{\infty}$$

gdzie W_∞ jest pracą jaką wykonałaby siła działająca na ładunek w polu elektrostatycznym przy przeniesieniu go z nieskończoności do punktu r , a E_p jest elektryczną energią potencjalną która zostałaby w takim przypadku zmagazynowana w **układzie cząstka-ciało**.

Potencjał elektrostatyczny

Potencjał elektrostatyczny definiujemy jako energię potencjalną cząstki przypadającą na jednostkę ładunku:

$$V = \frac{E_p}{q_0} = -\frac{W_\infty}{q_0}$$

gdzie q_0 – dodatni ładunek próbny, a V – potencjał elektrostatyczny.

Jeśli cząstka o ładunku q znajduje się w punkcie, w którym potencjał pola elektrycznego wytwarzanego przez naładowane ciało równy jest V , to elektryczna energia potencjalna E_p układu cząstka-ciało wynosi

$$E_p = qV.$$

Jednostką potencjału jest wolt.

Powierzchnia ekwipotencjalna

Potencjał pola elektrycznego we wszystkich punktach na powierzchni ekwipotencjalnej jest jednakowy. Praca wykonana nad ładunkiem przy przenoszeniu go z jednej powierzchni na drugą nie zależy od położenia tych punktów na odpowiednich powierzchniach i nie zależy od toru, po jakim przynosi się ten ładunek. Praca wykonana nad ładunkiem przy przesuwaniu go po jednej powierzchni ekwipotencjalnej znika.

Potencjał elektrostatyczny, a natężenie pola elektrycznego

$$\Delta V = -\int_i^f \vec{E} d\vec{l}$$

$$dV = -E dr$$

Widać, że zmiana potencjału powiązana jest z natężeniem pola elektrycznego, co można zapisać jako:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \Rightarrow \vec{E} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Czyli

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\nabla V$$

Natężenie pola elektrycznego \vec{E} jest zawsze skierowane prostopadle do odpowiednich powierzchni ekwipotencjalnych.

Operator gradientu ma następującą postać:

współrzędne kartezjańskie

$$\nabla V(x, y, z) = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

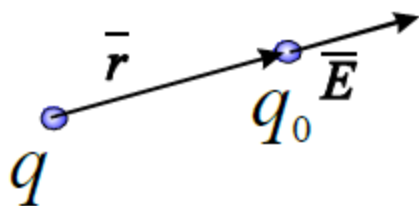
współrzędne cylindryczne

$$\nabla V(\rho, \varphi, z) = \left[\frac{\partial V}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

współrzędne sferyczne

$$\nabla V(r, \theta, \varphi) = \left[\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right]$$

Potencjał elektrostatyczny ładunku punktowego



Rys. 2.5.4 Pole elektryczne ładunku punktowego

Potencjał elektryczny w punkcie \mathbf{r} w polu ładunku punktowego odpowiada pracy potrzebnej do przeniesienia ładunku próbnego z nieskończoności do punktu \mathbf{r} .

$$V = -\frac{W}{q_0} = -\frac{1}{q_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \vec{F} d\vec{r}' = -\frac{1}{q_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} q_0 \vec{E} d\vec{r}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^{\mathbf{r}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

Znając potencjał możemy wyznaczyć natężenie pola elektrycznego:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Pole elektryczne dla sferycznie symetrycznego rozkładu ładunków

Kula jednorodnie naładowana ładunkiem Q . Gęstość ładunku wynosi:

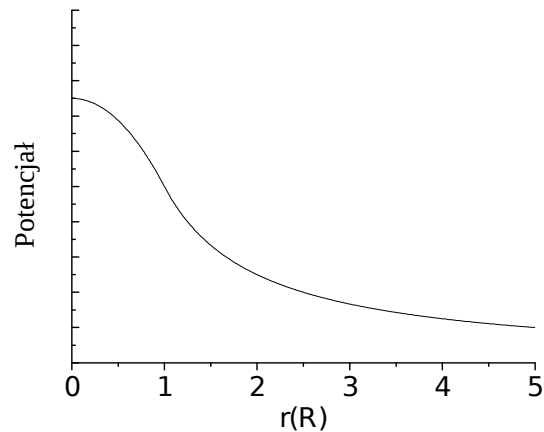
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{dla } r < R \\ 0 \quad \text{dla } r \geq R \end{array} \right.$$

Potencjał dla $r > R$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Potencjał dla $r < R$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\int_{\infty}^r E dr' = -\int_{\infty}^R E dr' - \int_R^r E dr' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^R \frac{1}{r'^2} dr' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R^r \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r'^3}{r'^2} dr' = \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{r'}\right)_{\infty}^R - \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi}{4\pi\epsilon_0} r' \Big|_R^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q(r^2 - R^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)
 \end{aligned}$$

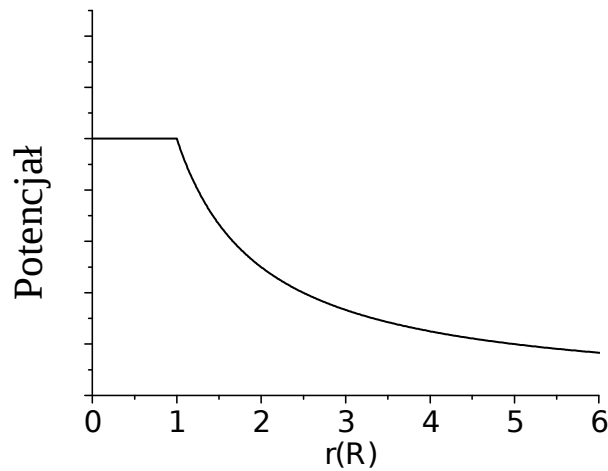


Rys. 2.5.5 Potencjał elektryczny pola jednorodnie naładowanej kuli o promieniu R

Naładowana przewodząca kula

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{dla } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$

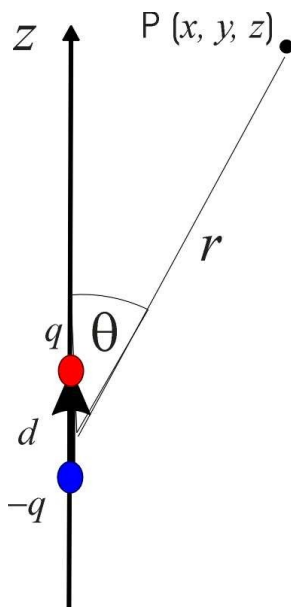
$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{dla } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{dla } r \geq R \end{cases}$$



Rys. 2.5.6 Potencjał elektryczny pola naładowanej kuli przewodzącej o promieniu \$R\$

Potencjał dipola elektrycznego to suma potencjałów każdego z ładunków, które tworzą ten dipol.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2}} \right]$$



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - zd + \frac{d^2}{4} \\ &= r^2 - zd + \frac{d^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r^2 - zd + \frac{d^2}{4}}} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \approx \\ &\frac{1}{r} \left(1 + \frac{zd}{2r^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Rys. 2.5.7 Potencjał elektryczny dipola elektrycznego

Dla

$r \gg d$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \left(1 + \frac{zd}{2r^2} - 1 + \frac{zd}{2r^2} + \dots \right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \frac{zd}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdz}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pr \cos\theta}{r^3}$$

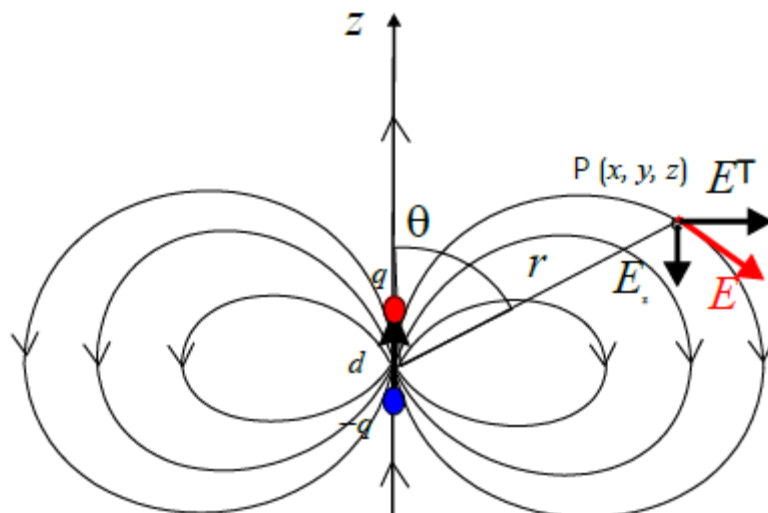
$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3}$$

Potencjał ten można wykorzystać do znalezienia natężenia pola elektrycznego wokół dipola:

$$\vec{E}(x, y, z) = -\text{grad}V$$



Rys. 2.5.8 Natężenie pola elektrycznego dipola elektrycznego

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{pz}{r^3} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{pxz}{r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{pyz}{r^5}$$

$$E_z = E_{\parallel} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) =$$

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \right)$$

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z^2}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\theta \sin\theta}{r^3}$$

$$E_{\parallel} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \right)$$

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\theta \sin\theta}{r^3}$$

Całkowite pole dipolowe:

$$E = \sqrt{E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[(3\cos^2\theta - 1)^2 + 9\cos^2\theta \sin^2\theta \right]$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

dla $\theta=0^\circ$:

$$E = + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

dla $\theta=180^\circ$:

$$E = - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Energia potencjalna układu unieruchomionych ładunków jest równa pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną przy stworzeniu tego układu



Rys. 2.5.9 Energia potencjalna układu unieruchomionych ładunków

W przypadku trzech ładunków dodajemy energię potrzebną do zbliżenia dwóch ładunków:

$$W_1 = E_{p21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2 q_1}{d} \right)$$

a następnie dodajemy energię potrzebną do zbliżenia trzeciego ładunku do dwóch poprzednich:

$$W_2 = E_{p31} + E_{p32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_3 q_1}{d} + \frac{q_3 q_2}{d} \right)$$

Całkowita energia wynosi więc:

$$W_{tot} = E_{21} + E_{p31} + E_{p32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2 q_1}{d} + \frac{q_3 q_1}{d} + \frac{q_3 q_2}{d} \right)$$

Równanie Poissona

$$\vec{\nabla}^2 \cdot V = - \frac{\rho_V(r)}{\epsilon_0}$$

współrzędne kartezjańskie

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

współrzędne cylindryczne

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

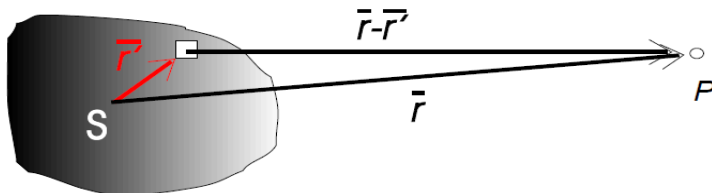
współrzędne sferyczne

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right)$$

Równanie Laplace'a w obszarze bez ładunków

$$\nabla^2 \cdot V = 0$$

Potencjał dowolnego rozkładu ładunków



Rys. 2.5.10 Potencjał dowolnego rozkładu ładunków $\rho(r)$

Niech punkt S będzie środkiem ładunku, tj.

$$\vec{r}_s = \frac{\int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r'}{\int \rho(\vec{r}') d^3 r'}$$

\vec{r}_s – wektor położenia środka ładunku

Niech w układzie współrzędnych $\vec{r}_s = 0$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + r'^2} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3r'}{\sqrt{1 + \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \left(1 + \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho(\vec{r}') d^3r'$$

Rozwijając mianownik w szereg:

$$\left(1 + \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{3}{8} \frac{(r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}')^2}{r^4} - \frac{15}{16} \frac{(r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}')^3}{r^6} + \dots$$

Możemy napisać, że

dla $r \gg r'$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d^3r' \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'}{r^2} + \frac{3}{8} \frac{(r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}')^2}{r^4} - \frac{15}{16} \frac{(r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}')^3}{r^6} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') d^3r' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r} \rho(\vec{r}') d^3r' - \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \int r'^2 \rho(\vec{r}') d^3r' + \dots \\ &= \frac{K_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{K_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{K_3}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i}{4\pi\epsilon_0 r^i} \end{aligned}$$

gdzie K_1, K_2, K_3 – momenty **multipolowe** rozkładu ładunków. Potencjał elektryczny dowolnego rozkładu ładunków możemy wyrazić jako szereg zawierający w mianowniku kolejne potęgi r , a liczniku pewne wielkości określone przez konkretny rozkład.

$$K_1 = \int \rho(\vec{r}') d^3 r' = Q$$

$$K_2 = \int \vec{r}^0 \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r' = \int r' \cos(\vec{r}^0 \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' = \vec{r}^0 p$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \left[3 \int (\vec{r}^0 \vec{r}')^2 \rho(\vec{r}') d^3 r' - \int r'^2 \rho(\vec{r}') d^3 r' \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[3 \int (\vec{r}^0 \vec{r}')^2 \rho(\vec{r}') d^3 r' - \int r'^2 \rho(\vec{r}') d^3 r' \right] = \frac{1}{2} \int [3 \cos^2(\vec{r}^0 \vec{r}') - 1] r'^2 \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

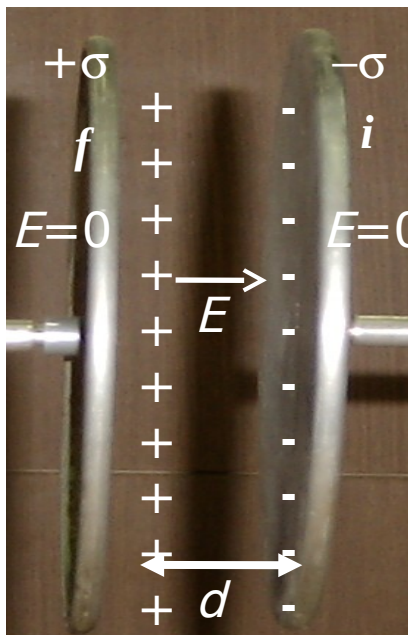
K_1 – moment pierwszego rzędu (monopolowy): **ładunek**

K_2 – moment drugiego rzędu: **rzut momentu dipolowego na wybrany kierunek**

K_3 – momenty trzeciego rzędu: **moment kwadrupolowy**

itd

2.6. Kondensator, pojemność przewodnika



Dwie przewodzące płyty równoległe naładowane ładunkiem odpowiednio $+q$ i $-q$ i rozdzielone na odległość d to kondensator płaski.

Napięcie U - różnica potencjałów na okładkach

$$U = V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$U = \int_-^+ E dr = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{d}{\epsilon_0 A} q$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Rys. 2.6.1 Kondensator płaski

Napięcie jest proporcjonalne do ładunku q .

Pojemność kondensatora definiujemy jako:

$$C = \frac{q}{U}$$

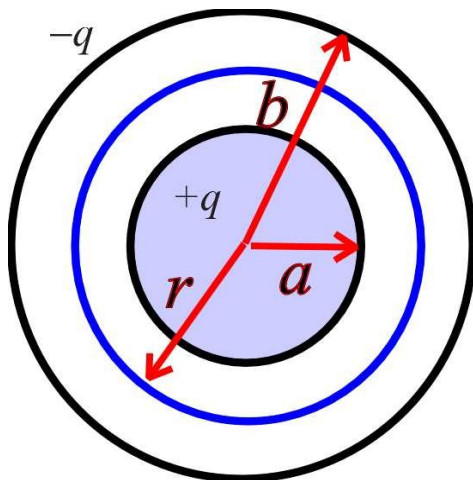
Jednostką pojemności jest farad

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ kulomb}}{1 \text{ volt}}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} = 8.85 \frac{pF}{m}$$

Pojemność kondensatora płaskiego: , gdzie

Kondensator kulisty



Rys. 2.6.2 Kondensator kulisty

$$q = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 E (4\pi r^2)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

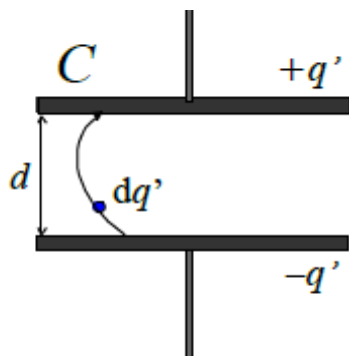
$$U = \int_{-}^{+} E dr = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

$b \rightarrow \infty \quad C \rightarrow 4\pi\epsilon_0 a$
dla

Energia zmagazynowana w polu elektrycznym kondensatora



Rys. 2.6.3 Ładowanie kondensatora

Naładowanie kondensatora wymaga wykonania pracy przez siłę zewnętrzną. Załóżmy, że na okładkach jest zgromadzony ładunek q' , dołożenie na okładkę ładunku dq' wymaga wykonania pracy dW :

$$dW = U' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

Zatem naładowanie kondensatora ładunkiem Q wymaga energii:

płaskiego

$$W = \int_0^Q dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q' dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Praca ta jest zmagazynowana w kondensatorze w postaci energii potencjalnej pola elektrycznego E_p

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$

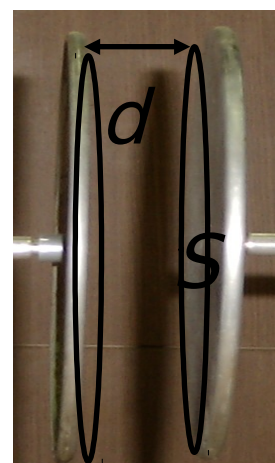
$$u_E = \frac{E_p}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{CSd} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\frac{\epsilon_0 S}{d} Sd} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2}$$

ale:

$$\frac{q}{S} := \sigma = \epsilon_0 E$$

więc

$$u_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$



Rys.2.6.3. Gęstość energii pole elektrycznego

Wzór ten wyprowadzony dla stosunkowo prostego przypadku jednorodnego pola elektrycznego w kondensatorze płaskim jest jednak prawdziwy ogólnie. Można go w szczególności zastosować do znalezienia energii pola elektrycznego wokół ładunku punkowego.

$$\begin{aligned} E_p &= \int_R^\infty u_E 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 4\pi r^2 dr = \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Pojemność kondensatora kulistego :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Energia potencjalna kondensatora kulistego:

$$E_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Wzór na energię pola elektrycznego wyrażoną przez wektor pola jest **równoważny** matematycznie wzorowi opisującemu energię pola przez jego źródła.

Łączenie kondensatorów

Równoległe:

Jednakowe napięcie U na wszystkich kondensatorach

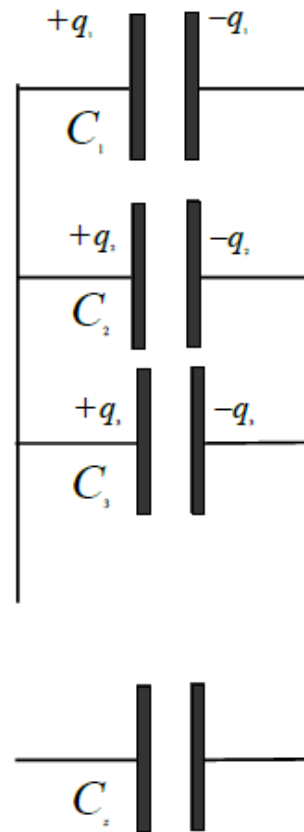
$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$$

czyli

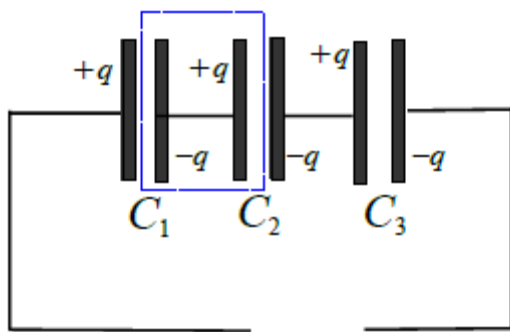
$$\begin{aligned} C_z &= \frac{Q}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \frac{q_3}{U} + \dots = \\ &= C_1 + C_2 + C_3 + \dots \end{aligned}$$

Ogólnie

$$C_z = \sum_i C_i$$



Rys. 2.6.4 Połączenie równoległe kondensatorów



Rys. 2.6.5 Połączenie szeregowe kondensatorów

Szeregowo:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_2} + \dots = \frac{Q}{C_z}$$

$$\frac{1}{C_z} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$



Rys. 2.6.5. Kondensatory powietrzne

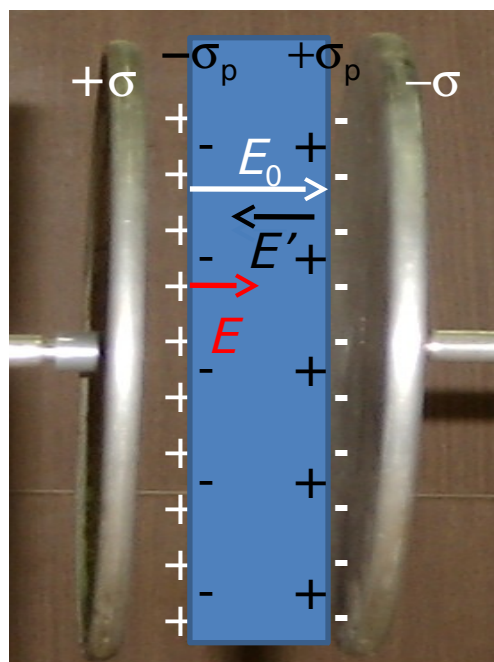


Rys. 2.6.6. Butelka lejdejska

Wynalazcami butelki byli niezależnie od siebie Pieter van Musschenbroek, profesor Uniwersytetu w Lejdzie i Ewald Jürgen Georg von Kleist z Kamienia Pomorskiego. Obaj donieśli o swoim wynalazku w 1745 r.

W wersji Kleista było to naczynie ze szkła wypełnione wodą i zatkane korkiem, który był przebity na wylot miedzianym drutem. Butelkę można było naładować elektrycznie stykając pręt z naładowanym ciałem. Poprzez drut i wodę prąd dostawał się do środka naczynia i ładował dodatnio lub ujemnie jego wewnętrzne ścianki.

Kondensator z dielektrykiem



Rys. 2.6.7. Kondensator z dielektrykiem

Pod wpływem pola elektrycznego następuje polaryzacja dielektryka. W efekcie na jego powierzchni pojawia się pewien związany ładunek polaryzacyjny σ_p . W wyniku pojawienia się tego ładunku pole elektryczne wewnątrz dielektryka zmniejsza się:

$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

Można to przedstawić w postaci:

$$\sigma = \epsilon_0 E + \sigma_p$$

z której widać związek gęstości ładunku swobodnego (σ) z natężeniem pola elektrycznego w dielektryku (E) i gęstością ładunku polaryzacyjnego σ_p .

Gęstość ładunku polaryzacyjnego można opisać wektorem polaryzacji \mathbf{P} , którego wartość zależy liniowo od natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} :

$$\sigma_p = P = \chi_e \varepsilon_0 E$$

gdzie χ_e - podatność elektryczna (w ogólnym przypadku tensor). Wynika to z założenia liniowej odpowiedzi układu. Aby opisać pole elektryczne generowane wyłącznie przez ładunki swobodne, wprowadzamy pole indukcji elektrycznej D .

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi_e E = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) E$$

$$D = \varepsilon E,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ε - przenikalność elektryczna

ε_r - względna przenikalność elektryczna

$$C' = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\varepsilon_r Q}{E_0 d} = \varepsilon_r C$$

Kondensator z dielektrykiem

Pojemność:

$$C' = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\varepsilon_r Q}{E_0 d} = \varepsilon_r C$$

Energia – stałe napięcie

$$Q' = \varepsilon_r Q$$

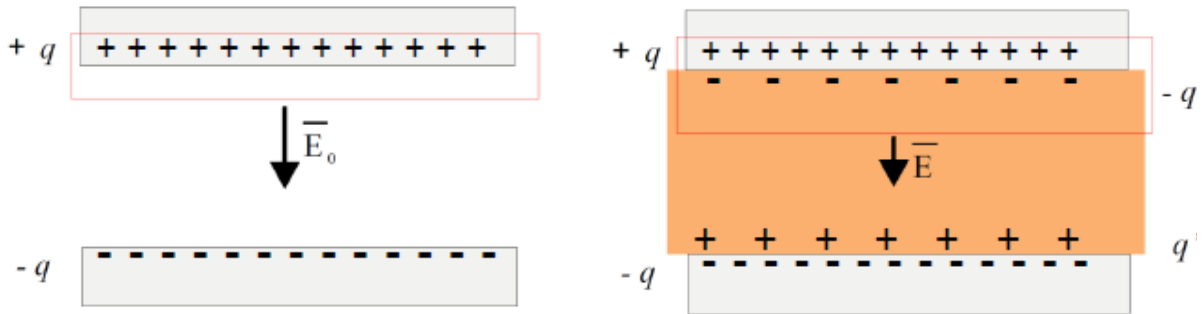
$$E_p' = \frac{C' U^2}{2} = \frac{\varepsilon_r C U^2}{2} = \varepsilon_r E_p$$

Energia – stały ładunek

$$U' = \frac{U}{\varepsilon_r}$$

$$E_p' = \frac{Q^2}{2C'} = \frac{Q^2}{2\epsilon_r C} = \frac{E_p}{\epsilon_r}$$

Prawo Gaussa w dielektrykach



Rys. 2.6.8. Prawo Gaussa w kondensatorze bez i z dielektrykiem

Dla kondensatora z dielektrykiem pole elektryczne E pomiędzy okładkami wiąże się z gęstością ładunku swobodnego:

$$\epsilon_0 \oint_{\Sigma} E_0 dS = \epsilon_0 E_0 S = q$$

Po wstawieniu dielektryka:

$$\epsilon_0 \oint_{\Sigma} E dS = \epsilon_0 E S = q - q'$$

$$q = \epsilon_0 E S + q'$$

$$q' = P S = \chi_e \epsilon_0 E S$$

$$q = \epsilon_0 E S + \epsilon_0 \chi_e E S = \epsilon_0 \epsilon_r E S$$

$$q = \oint_{\Sigma} \epsilon_0 \epsilon_r E dS = \oint_{\Sigma} \epsilon E dS$$

$$q = \oint_{\Sigma} D dS$$

Prowadzi to do postaci równań elektrostatyki w jednorodnym dielektryku

$$\nabla \cdot D = \rho_{Vsw}(r)$$

$$\nabla \times E = 0$$

$$D = \epsilon E$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}$$